1．解析学とは

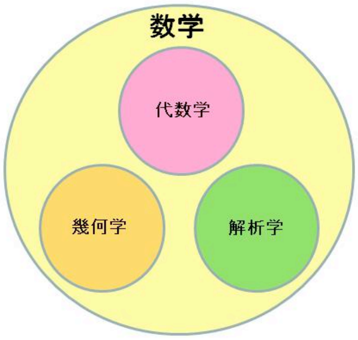
解析学

解析学とは

○代数学、幾何学と並んで、数学を大きく分けたときの
一つの分野.

○変化する量を実数や複素数の
関数として研究する数学.

○極限概念を基礎とする.



1.	今日から解析学を勉強します.	1.	From today, we study analysis.
2.	数学の分野には，代数学や幾何学と並んで解析学と呼ばれる大きな分野があります.	2.	In mathematics, analysis is one of the major fields along with algebra and geometry.
3.	解析学とは，変化する量を実数や複素数の関数として研究する数学で，微分積分学がその中心となります.	3.	It studies quantities that vary as a function of real numbers or complex numbers. Differentiation and integration are the major subjects in this field.
4.	この講義では，そのスタートとして，微分について説明します.	4.	In the beginning of this lecture, I will explain about differentiation.
5.	そこでは極限概念を基礎としていますので，それを理解することが重要です.	5.	It is very important to understand the concept of limit because it is the base of analysis.

キーワード

・解析学，　・微分方程式，　・数学，　・代数学，　・幾何学

日本語解説

題「解析学」

「学」という字は「学ぶこと」「学問」study という意味です。色々な言葉の後ろについて、学問分野を表します。

（例）	数	number	→	数学	mathematics
	解析	analysis	→	解析学	(study of) analysis
	代数	algebra	→	代数学	(study of) algebra
	幾何	geometry	→	幾何学	(study of) geometry

文１「今日から」

「今日」は today です。昨日は yesterday、明日は tomorrow です。

「から」は from という意味の助詞 (particle) で、時間 (time) や場所 (place) の始まり・起点 (starting point) を示します。

今回の授業から新しい内容が始まることがわかります。これは講義の最初によく出てくる表現です。

☞「講義に役立つ日本語」

文２「分野」

「分」は「分ける」to divide という意味です。「野」は field という意味です。

このように、漢字は１文字1文字が意味を持っています。「分野」のように漢字を組み合わせた言葉を熟語 (compound word) といい、それぞれの漢字の意味を組み合わせた意味を表します。ここでの「分野」は「学問分野」study field（divided from other study field）を表します。

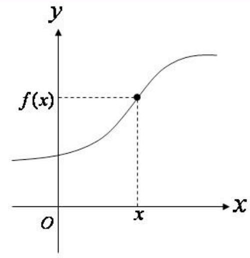
（例）	分	divide	＋	野	field	＝	分野	(study) field
	微	small	＋	分	divide	＝	微分	differentiation
	積		＋	分	divide	＝	積分	integration

2. 関数

関数

関数 ： ある変数に依存して決まる値
あるいはその対応を表す式

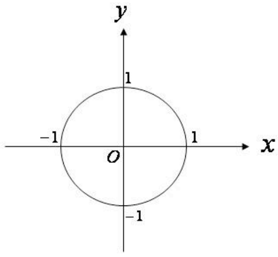
$$y = f(x) \quad \begin{cases} x: 独立変数 \\ y: 従属変数 \end{cases}$$



[例]円を表す式 $x^2 + y^2 = 1$

$$\left.\begin{array}{ll} 陽関数 & y = \pm\sqrt{1-x^2} \\ 陰関数 & x^2 + y^2 = 1 \end{array}\right\} 二価関数$$

$$定義域 \quad \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$



1.	まずはじめに，関数について説明します.	1.	First, I will explain functions.
2.	関数とは，ある変数に依存して決まる値，あるいはその対応を表す式です.	2.	Function is a relation between sets of variables or an expression which represents this relationship.
3.	最初に,ある量の変化にともなって別の量が変化する場合を考えてみます.	3.	Let's consider examples where a quantity changes with the change in another quantity.
4.	たとえば部屋の温度 T は時間 t の経過に従って変化します.	4.	For example, temperature T in a room changes with time t.
5.	またある道に沿った距離を x，その場所の標高を h とすると，高さ h は距離 x とともに変化します.	5.	Let the distance along a road be x and the height at that position be h. This height h changes depending on the distance x.
6.	この時間や距離のように任意に取りうる変数を独立変数，その独立変数を与えることによって決まる変数を従属変数といいます.	6.	As time and distance in the above examples, independent variables are those which can be manipulated. Whereas dependent variables are those determined by independent variables we choose.
7.	いま独立変数を x，従属変数を y で表すと	7.	Denoting a dependent variable by x and

y は x の関数であるといいます.

an independent variable by y, we say that y is a function of x.

8. この関数を $y=f(x)$ などと書きます.

8. This relation is expressed as $y=f(x)$.

9. この関数の変化する様子は，右上の図のように直交座標上の点の移動で表すことができます.

9. We can illustrate the change of a function by the trajectory of movement of a point in the rectangular coordinates as shown in the above right figure.

10. ここで，関数の例として，円を表す式を考えてみます.

10. Here, as an example of a function, we discuss an expression for a circle.

11. 円は，x，y 座標上で $x^2+y^2=1$ と表されます.

11. A circle can be expressed by $x^2+y^2=1$ in the x y-coordinates.

12. ここで，x を独立変数と考えれば，y を x の関数と考え，$y=\pm\sqrt{1-x^2}$ と表すことができます.

12. Here we decide x as an independent variable. Considering that y is a function of x, we rearrange the expression to $y=\pm\sqrt{1-x^2}$.

13. このような表現をしたときに，y は x の陽関数といいます.

13. In such an expression, it is said that y is an explicit function of x.

14. これに対し，y が x の関数であることを $x^2+y^2=1$ と表すこともできます.

14. On the contrary, $x^2+y^2=1$ also expresses a relation between x and y.

15. この表現のとき，y は x の陰関数と呼ばれます.

15. In this expression, it is said that y is an implicit function of x.

16. 右上の図のように，独立変数 x の値に対して関数 $y=f(x)$ がただ一つ定まるとき，一価関数といいます.

16. As shown in the above right figure, when only one value is determined by the function $y=f(x)$ for a given value x, this function is called a single valued function.

17. これに対し，右下の図の円の場合のように，二つ定まるとき，二価関数といいます.

17. While in the case of a circle shown in the below right figure, there are two values corresponding to a given value x and it is called a two valued function.

18. 二価関数以降はまとめて多価関数と呼ばれることもあります.

18. Two or more valued functions are called multi valued function.

19. なお，円を表す関数において，x の取り得る値は $-1\le x\le 1$，y の取り得る値は $-1\le y\le 1$ となり，このような値の領域を定義域といいます.

19. In the function for this circle, x varies in $-1\le x\le 1$ and y varies in $-1\le y\le 1$. Such ranges are called domains.

キーワード

・関数，　・独立変数，　・従属変数，　・陽関数，　・陰関数，　・二価関数，　・定義域

日本語解説

文1「まずはじめに」
文3「最初に」
どちらも at first という意味で、最初の話題を話し始める時に使います。
☞「講義に役立つ日本語」

文1「～について」
about という意味で、これから扱う話題を出すときによく使う表現です。
☞「講義に役立つ日本語」

文4「温度 T」「時間 t」
アルファベットは英語の発音を日本語の発音に置き換えたもので読みます。T と t は両方ともティーと読みます。英語の発音を日本語で置き換えた言葉は、カタカナで書きます。このような言葉のことをカタカナ語と言います。
数学や物理ではアルファベットの記号がたくさん出てきます。下の表はアルファベットの読み方です。読み方が 2 つ以上あるものもあります。

アルファベットの読み方

a	エー　エイ	j	ジェー　ジェイ	s	エス
b	ビー	k	ケー　ケイ	t	ティー
c	シー	l	エル*	u	ユー
d	ディー	m	エム*	v	ブイ*　ヴィー
e	イー	n	エヌ*　エン	w	ダブリュ　ダブル*
f	エフ	o	オー	x	エックス*
g	ジー	p	ピー	y	ワイ
h	エイチ　エッチ*	q	キュー	z	ゼット*　ズィー
i	アイ	r	アール*		

一部、英語の発音と大きく異なるもの、促音（小さい「ッ」）が入るもの（表中の*印）が間違いやすいので注意が必要です。

文５「高さ h」「距離 x」

h はエイチ、x はエックスと読みます。

「高さ」は height という意味の名詞（noun）です。「高い」は high という意味の形容詞（adjective）です。形容詞に“さ”を付けると程度を表す名詞になります。

形容詞は “－い”“－いです”の形で、形容動詞は“－だ”“－です”の形です。

（例）

○形容詞（い adjective）

高い	high	→	高さ	height
大きい	big, large	→	大きさ	size
長い	long	→	長さ	length

○形容動詞（な adjective）

便利な	convenient	→	便利さ	convenience
安全な	safe	→	安全さ	safety
きれいな	clean	→	きれいさ	cleanness

日本語の形容詞には２つの種類があります。形容詞（い adjective）と形容動詞（な adjective）です。種類によって、活用のパターンが違います。

（例）

○形容詞（い adjective）

高い	富士山は日本で一番高い山です。
高いです	富士山とエベレストでは、エベレストの方が高いです。
高い	富士山とエベレストでは、エベレストの方が高い。
高かった	昨日新幹線で富士山を見ました。とても高かったです。
高くない	世界の中で見れば、富士山はそんなに高くないです。
高くて	富士山は高くて美しいです。

○形容動詞（な adjective）

便利な	コンビニは便利なお店です。
便利です	駅のそばのコンビニは便利です。
便利だ	駅のそばのコンビニは便利だ。
便利だった	あのコンビニは昔とても便利だった。
便利じゃない	今はそんなに便利じゃないです。
便利で	あのコンビニは便利で安いです。

文８「$y = f(x)$」

「y」はワイ、「f」はエフ、「x」はエックスと読みます。

「＝」は等号と言い、equal を日本語の読み方にしたイコールと読みます。

「(」はかっこ、「)」はかっこ閉じるなどと読みますが、読まないこともあります。最初のかっこだけ読むこともあります。

この式は“ワイ イコール エフ （かっこ） エックス （かっこ閉じる）”などと読みます。

文１１「$x^2 + y^2 = 1$」

「＋」は plus を日本語の読み方にしたプラスと読みます。足すと読むこともあります。

「x^2」の 2 は二乗（“にじょう”または“じじょう”）と読みます。

この式は“エックスじじょう プラス ワイじじょう イコール いち”などと読みます。

数字の読み方

1	一	いち	11	十一	じゅういち
2	二	に	12	十二	じゅうに
3	三	さん	｜		
4	四	し　よん	20	二十	にじゅう
5	五	ご	21	二十一	にじゅういち
6	六	ろく	｜		
7	七	しち　なな	100	百	ひゃく
8	八	はち	101	百一	ひゃくいち
9	九	きゅう	｜		
10	十	じゅう	110	百十	ひゃくじゅう

文１２「$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$」

「±」は plus minus を日本語の読み方にしたプラスマイナスと読みます。

「√」は平方根と言い、root を日本語の読み方にしたルートと読みます。

文１３「陽関数」

文１５「陰関数」

「陽」は positive という意味で、明るい（light）、日向（sunny）、正（plus）、暖かい（warm）というイメージがあります。

「陰」は negative という意味で、暗い（dark）、日陰（shade）、負（minus）、寒い（cold）というイメージがあります。

文１９「$-1 \le x \le 1$」

「－」は minus を日本語の読み方にしたマイナスと読みます。

「≦」は不等号と言い、色々な読み方があります。

例えば、この式は「エックスはマイナス以上で、いち以下」「マイナスいち 大なりイコール エックス 大なりイコール いち」などと読みます。

（例）

＜ ： ～は…より大きい　大なり　　＞ ： ～は…より小さい　小なり

≦ ： ～は…以上　大なりイコール　　≧ ： ～は…以下　小なりイコール

3. 連続と極限

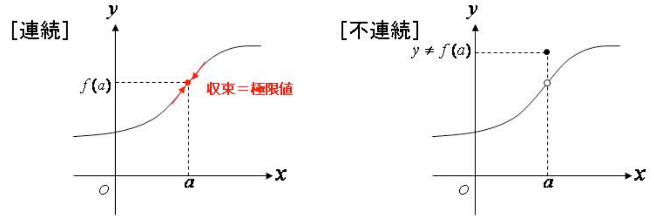
連続と極限

連続関数 ： $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

$x \to a$ となるとき $f(x)$ が $f(a)$ に収束

厳密な定義 ： $|x-a|<\delta$ ⇨ $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$
（ δ, ε ： 正の小さい数 ）

不 連 続 ： $x \to a$ ⇨ $f(x)$ の極限値が存在しない / $f(a)$ に等しくない



1.	x の関数 $f(x)$ があって，$x \to a$ となるとき，$f(x)$ が $f(a)$ に収束するならば，$f(x)$ は $x = a$ で連続であるといいます．	1.	In the function $f(x)$ of x, it is said that the function $f(x)$ is continuous if $f(x)$ converges to a value equals to $f(a)$ when $x \to a$.
2.	このことを式で表すと $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ となります．	2.	This condition is expressed by $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
3.	数学的に厳密な連続の定義に $\varepsilon - \delta$ 論法という極限の扱い方があります．	3.	A mathematically rigorous definition of continuity is given by the epsilon-delta definition.
4.	そこでは，「正の数 ε に対して常にある正の数 δ を適当に小さく取ったとき，$\|x-a\|<\delta$ となるとき必ず $\|f(x)-f(a)\|<\varepsilon$ となれば，$f(x)$ は $x = a$ で連続である」と定義されます．	4.	The definition is,” For any number $\varepsilon > 0$, however small, there exists some number $\delta > 0$ such that for all x in the domain with $\|x-a\|<\delta$, the function $f(x)$ is continuous at $x = a$ if $f(x)$ satisfies $\|f(x)-f(a)\|<\varepsilon$.
5.	一方，この右下の図のように，$x \to a$ となるとき $f(x)$ の極限値が存在しないか，あるいは存在してもそれが $f(a)$ に等しくない場合は不連続であるといいます．	5.	On the contrary, as shown in the below right figure, it is discontinuous if there is not a limit value of $f(x)$ or even if it exists but not equal to $f(a)$ when $x \to a$.

キーワード

・連続関数,　・極限,　・不連続

日本語解説

文１「$x \to a$となるとき」

記号「→」は矢印と言います。「→」は右矢印、「←」は左矢印です。

「x」はエックス、「a」はエーと読みます。

この文は「xがaとなるとき」などと読みます。

動詞（verb）「なる」は、あるものが別のものに変化する（change）ことを表します。前につく助詞（particle）は「と」と「に」がありますが、意味は同じです。

例：試験は火曜日となりました。 ／ 試験は火曜日になりました。

文２「$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$」

「lim」は limit を日本語の読み方にしたリミットと読みます。

英語の～t で終わる単語は、～ットと読むことが多いです。

（例）	carpet	カーペット
	credit	クレジット
	mat	マット
	market	マーケット
	merit	メリット
	spot	スポット
	ticket	チケット

文３「$\varepsilon - \delta$」

「ε」は epsilon を日本語の読み方にしたイプシロンと読みます。

「δ」は delta を日本語の読み方にしたデルタと読みます。

文４「正の数」

ここでの「正」は plus という意味です。「正」という漢字には正しい（correct, (moralistically) clean, good, honorable）という読み方や意味もあります。

「正」の反対の言葉は「負」で、minus という意味です。「負」という漢字には負ける（to lose）という読み方や意味もあります。

文５「不連続」

言葉の前に「不」という漢字がつくと、それを否定する意味・反対の意味の言葉になります。

（例）

○不～：～じゃない，～しない

連続	continuous	→	不連続	discontinuous
安定	stable	→	不安定	unstable
親切	kind	→	不親切	unkind
必要	necessary	→	不必要	unnecessary
便利	convenient	→	不便*	inconvenient

＊ 例外：不便利とは言いません。

このように、他にも、前の漢字１文字が接頭語（prefix）になって、後ろの言葉の意味を変える熟語があります。

（例）

○非～：～じゃない

常識	common sense	→	非常識	lacking common sense
日常	regular life	→	非日常	irregular life
			非常＊	emergency
人間的	humanizing	→	非人間的	dehumanizing

＊ 例外

○無～：～がない

試験	examination	→	無試験	without examination
意味	meaning	→	無意味	meaningless

○未～：まだ～ない

発表	published	→	未発表	unpublished
経験	experienced	→	未経験	inexperienced
発見	discovered	→	未発見	undiscovered

○大～：大きい～

企業	company	→	大企業	big company
都市	city	→	大都市	big city
国	country	→	大国	power country

○超～：とても～

大国	power country	→	超大国	super power country
高圧	high voltage	→	超高圧	ultrahigh voltage

○新～：新しい～

時代	era	→	新時代	new era

製品	product	→	新製品	new product
発見	discovered	→	新発見	newly discovered

☞「講義に役立つ日本語」

4.　微分係数（微分商）

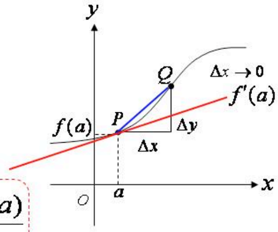
微分係数（微分商）

$\Delta x \quad \longrightarrow \quad \Delta y = f(a+\Delta x) - f(a)$

平均変化率　$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$

$\Big\downarrow \Delta x \to 0$

微分係数（微分商）　$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$



$x = a$ として $\Delta x \to 0$ のとき極限値が存在 ⇒ $f(x)$ は $x = a$ で微分可能

⇒ $f'(a)$ は $x = a$ における $f(x)$ の微分係数

連続で微分可能な場合 ⇒ 導関数　$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

導関数の表現

$f'(x)$　　$\dfrac{df(x)}{dx}$　　y'　　$\dfrac{dy}{dx}$　　$\dot{y}$　　$D_x y$

1. つぎに，微分係数（微分商）について説明します．
2. まず，変数 x の（一価）関数 $y = f(x)$ について，x の値の変動 Δx に伴う y の値の変動 Δy を考えます．
3. 今 x が $x = a$ から $a + \Delta x$ になったときの y の値を $y + \Delta y$ で表せば，$y + \Delta y = f(a+\Delta x)$，すなわち $\Delta y = f(a+\Delta x) - y$ $= f(a+\Delta x) - f(a)$ となります．
4. このとき Δy を x の増分 Δx に対する y の増分といいます．
5. ここで，a と $a + \Delta x$ との間の区間における平均変化率は $\Delta y / \Delta x = \{f(a+\Delta x) - f(a)\} / \Delta x$ となります．
6. 今 $\Delta x \to 0$ なるとき，この商の極限値が存在するならば，それは $x = a$ における $f(x)$ の変動率というべきものになります．
7. それを通例 $f'(a)$ で表して，$x = a$ における

1. Next, I will explain the differential coefficient (the difference quotient).
2. Let $y = f(x)$ be a single valued function of x. With an increment Δx in x, the corresponding increment in y is Δy.
3. Let the value corresponding to $a + \Delta x$ be $y + \Delta y$. Then, $y + \Delta y = f(a+\Delta x)$ holds and we obtain $\Delta y = f(a+\Delta x) - y$ $= f(a+\Delta x) - f(a)$.
4. Where Δy is called the increment of y corresponding to Δx, the increment in x.
5. The average rate of change between a and $a + \Delta x$ equals $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\{f(a+\Delta x) - f(a)\}}{\Delta x}$.
6. If there is a limit of this rate when Δx approaches zero, we can call this the rate of change of $f(x)$ at $x = a$.
7. This value is denoted by $f'(a)$ and is

	$f(x)$ の微分係数(びぶんけいすう)または微分商(びぶんしょう)といいます.		called the differential coefficient or the difference quotient of $f(x)$ at $x=a$.
8.	この図(ず)でいえば，赤線(あかせん)のような，$x=a$ における接線(せっせん)の傾(かたむ)きに対応(たいおう)します.	8.	In this figure, it corresponds to the slope of the tangent line at $x=a$.
9.	通常(つうじょう)取(と)り扱(あつか)う簡単(かんたん)な関数(かんすう)についてはその連続(れんぞく)なところでは特殊(とくしゅ)な点(てん)を除(のぞ)けば微分(びぶん)可能(かのう)であって，その微分係数(びぶんけいすう)は x の関数(かんすう)となります.	9.	Simple functions which we often use are generally differentiable except at specific points and their differential coefficients are functions of x.
10.	それを導関数(どうかんすう)といい，$f(x)$ の導関数(どうかんすう)を $f'(x)$ で表(あらわ)します.	10.	This function is called the derivative and the derivative of $f(x)$ is denoted by $f'(x)$.
11.	導関数(どうかんすう) $f'(x)$ を表(あらわ)すにはまた次(つぎ)のような記号(きごう)が用(もち)いられる場合(ばあい)があります. y', $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df(x)}{dx}$, $\dot{y}$, $D_x y$.	11.	The following notations are also used to denote a derivative： y', $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df(x)}{dx}$, $\dot{y}$, $D_x y$.
12.	導関数(どうかんすう)を求(もと)めることを微分(びぶん)するといい, その演算(えんざん)を微分法(びぶんほう)といいます.	12.	To derive derivatives is called to differentiate and the process of finding a derivative is called differentiation.

キーワード

・微分係数，　・微分商，　・導関数

日本語解説

文(ぶん)２「変動(へんどう) Δx 」

「変(へん)」は変(か)わる（change）という意味(いみ)です。「動(どう)」は動(うご)く（move）という意味(いみ)です。

このように、似(に)た意味(いみ)の漢字(かんじ)が組(く)み合(あ)わさって、1つの熟語(じゅくご)になることがあります。

（例(れい)）変	change	＋	動	move	＝	変動(へんどう)	increment
便	convenient	＋	利	useful	＝	便利(べんり)	convenient
記	write	＋	入	input	＝	記入(きにゅう)	write down
反	anti	＋	対	counter	＝	反対(はんたい)	opposite, disagree
早	early	＋	速	fast	＝	早速(さっそく)	soon

「Δ」は delta を日本語(にほんご)の読(よ)み方(かた)にしたデルタと読(よ)みます。

「Δx」は“デルタ エックス”と読(よ)みます。

文３「$y + \Delta y = f(a + \Delta x)$」

この式は“ワイ プラス デルタ ワイ イコール エフ （かっこ） エー プラス デルタ エックス （かっこ閉じる）”などと読みます。

このように長い式になると、授業では全部読まずに、数式を示しながら「この式」「このような式」（this equation）と言うことが多いようです。

文５「$\Delta y/\Delta x = \{f(a + \Delta x) - f(a)\}/\Delta x$」

「$\Delta y/\Delta x$」は分数（fraction）ですが、読み方は「デルタエックス 分の デルタワイ」というように、はじめに分母（denominator）を読んで、“分の”という言葉をはさみ、最後に分子（numerator）を読みます。

（例）1 / 2：二分の一
　　　2 / 3：三分の二

「{}」は中かっこと言います。読むときは中かっこ・中かっこ閉じると読むか、単にかっこ・かっこ閉じると読むか、読まないこともあります。

例えば、「$\{f(a + \Delta x) - f(a)\}/\Delta x$」は“デルタエックス 分の （中かっこ） エフ（かっこ）エー プラス デルタエックス （かっこ閉じる） マイナス エフ （かっこ） エー （かっこ閉じる） （中かっこ閉じる）”などと読みます。

または「/」は slash を日本語の読み方にしたスラッシュと読むこともあります。

分数の分は分ける（to divide）という意味の漢字です。
分母の母はお母さん（mother）という意味の漢字です。
分子の子は子ども（child）という意味の漢字です。

文７「$f'(a)$」

「’」は dash を日本語の読み方にしたダッシュと読みます。

「$f'(a)$」は“エフ ダッシュ エー”などと読みます。

文１０「導関数」

「導」は導く（to channel, to conduct）という意味の漢字です。

この漢字の上は道という漢字で、下は寸という漢字になっています。このように２つ以上の漢字を組み合わせて作られた漢字があります。意味も、元の漢字の意味を組み合わせたものになっていることが多いです。このような漢字を会意文字（logogram）と言います。

（例）道 road ＋ 寸 by hand → 導 conduct
　　　日 sun ＋ 月 moon → 明 bright

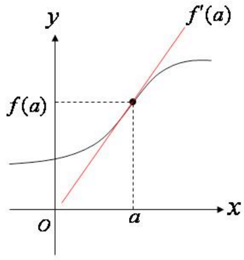
田（た）	rice field	＋	力（ちから）	power		→	男（おとこ）	man, male
女（おんな）	woman	＋	子（こ）	child		→	好（こう）	love, like
木（き）	tree	＋	木（き）			→	林（はやし）	wood, grove
木（き）	＋	木（き）	＋	木（き）		→	森（もり）	forest, jungle
門（もん）	gate	＋	日（ひ）	sun		→	間（あいだ）	between
火（ひ）	fire	＋	田（た）	field		→	畑（はたけ）	cultivated field

5. 微分の意味

微分の意味.

[微分の幾何学的意味]

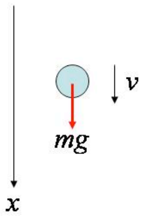
$f'(a)$ は曲線 $y=f(x)$ の $x=a$ の点に対する接線の傾き(勾配)である



[微分の物理学的意味]

距離 x を時間 t で微分 ⇨ $\dfrac{dx}{dt}=\dot{x}=v$: 速度

速度 v を時間 t で微分 ⇨ $\dfrac{dv}{dt}=\dot{v}=a$: 加速度



1. まず，微分の幾何学的意味について説明します．
2. 関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分商 $f'(a)$ は，右上の図のように曲線 $f(x)$ の $x=a$ の点に対する接線の傾き（勾配）を表します．
3. つぎに，微分の物理学的意味について説明します．
4. 例えば，落下物体の運動を考えます．一つの質点が x 軸上を運動するとき，その座標 x は時間 t の関数となります．すなわち，$x=f(t)$ となります．
5. 今 $t+\Delta t$ におけるその点の位置を $x+\Delta x$ とすれば，$\Delta x/\Delta t$ は t と $t+\Delta t$ との間におけるその点の平均速度となります．
6. よって $\Delta t\to 0$ なるときその極限値は時刻 t におけるその点の速度 v を表します．すなわち，距離 x を時間 t で微分すると速度 v になります．

1. First, I will explain the geometrical meaning of differentiation.
2. The difference quotient $f'(a)$ of $f(x)$ at $x=a$ represents a slope of the tangent line at $x=a$ as shown in the above right figure.
3. Next, I will explain the physical meaning of differentiation.
4. For example, consider the motion of a free falling body. When this body moves along the x axis taken downward, its coordinate x is a function of time t and written as $x=f(t)$.
5. Let the position at $t+\Delta t$ be $x+\Delta x$. Then $\Delta x/\Delta t$ represents the average velocity between t and $t+\Delta t$.
6. Therefore, its limit value when $\Delta t\to 0$ represents the velocity of the body v at time t. Namely, the differentiation of the distance x with respect to time t gives velocity v.

7. 速度 v も時間 t の関数で，速度 v は距離 x の時間 t に関する導関数となります.

7. Velocity v is also a function of time t and velocity is the derivative of x with respect to time t.

8. さらに同様にして，速度 v を時間 t で微分すると加速度 a となります.

8. Furthermore, differentiation of velocity v with respect to time t gives acceleration a.

キーワード

・接線，　・傾き（勾配），　・速度，　・加速度

日本語解説

文１「幾何学的意味」

この「的」は“における”“での”などに置き換えることができます。“幾何学における意味”　“幾何学での意味”でも意味は同じです。

文３「物理学的意味」

この「的」も同じく、“における”などに置き換えられます。“物理学における意味”“物理学での意味”でも意味は同じです。

文５「速度」

「速」は“スピードが速い”（fast）という意味です。

似た意味の漢字に“早”があります。読み方は同じですが、こちらは“ある基準に比べて時間が早い”（early）という意味です。

（例）スピードが速い（fast）

○　新幹線はとても速い電車です。

×　新幹線はとても早い電車です。

（例）時間が早い（early）

×　日本語の授業は朝速く始まります。

○　日本語の授業は朝早く始まります。

次の例は時間に関するものですが、“ある物事が終わるスピードが速い”（soon）という意味なので“速”を使います。

（例）

○　あの人はメールに返事をするのが速いです。

×　あの人はメールに返事をするのが早いです。

次の例は、“ある物事が終わるスピードが速い”“ある基準に比べて時間が早い”の両方の意味があり

ますので、“速”と“早”両方使えます。

（例）

○　今日は仕事が速く終わりました。

○　今日は仕事が早く終わりました。

さらに、この 2 つの漢字を組み合わせた“早速”という熟語があります。これも“ある物事が終わるスピードが速い”“ある基準に比べて時間が早い”の両方の意味があります。

（例）

早速のお返事どうもありがとうございました。

授業が始まって早速テストがあった。

「度」は物事の程度（degree）を表す漢字です。ある言葉や漢字にこの漢字がつくと、その程度を表す言葉になります。

（例）速い	fast	→	速度	speed
温かい	warm	→	温度	temperature
高い	high	→	高度	altitude, height
加速	accelerate	→	加速度	acceleration

文 6 「速度 v」

「v」はブイまたはビーと読みます。後者はヴィーと書くこともあります。“ヴ”は元々の日本語にはない発音ですが、アルファベット v の付く言葉を日本語の読み方で読むとき・書くときに時々使います。ただし、例外もあります（下の例の* 印）。

（例）Venus	→	ビーナス	ヴィーナス
version	→	バージョン	ヴァージョン
violin	→	バイオリン	ヴァイオリン
vision	→	ビジョン	ヴィジョン
veranda	→	ベランダ	（×　ヴェランダ*)
volt	→	ボルト	（×　ヴォルト*)
virus	→	ウイルス	（×　ビールス*　ヴィールス*)

6. 平均値の定理

平均値の定理.

[平均値の定理]

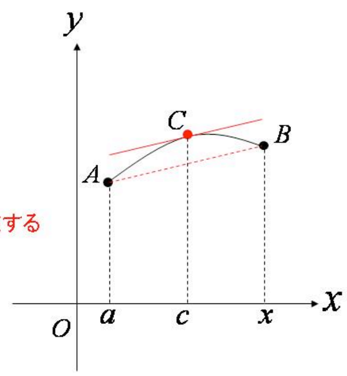
区間[a , x]で $f(x)$ が微分可能であれば

$$f'(c)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

となるような c が[a , x]間に少なくとも一つ存在する

変形すると

$$f(x)=f(a)+f'(c)(x-a)$$



1. つぎに，平均値の定理について説明します.
2. 定理は，「区間$[a,x]$で$f(x)$が微分可能であれば $f'(c)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ となるような所 c が a,x 間に少なくとも一つ存在する」になります.
3. この定理について，図で説明していきたいと思います.
4. この式の右辺，$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ は右の図において，点 A，B を結ぶ赤点線の傾きを表す式になります.
5. そしてこの定理では，この赤点線と同じ傾きとなる微分係数を有する点 C が少なくとも一つこの間に存在するということを言っています

1. Next, I will explain the mean value theorem.
2. This states “If $f(x)$ is differentiable in the section $[a,x]$, there is at least one point on that section at which the derivative of the curve is equal to the average rate of change in this section, that is the relation $f'(c)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ holds.
3. I will explain this theorem using this figure.
4. The right-hand side of this equation, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ represents the slope of the red line connecting points A and B.
5. This theorem states that there is at least one point C in this section, where the differential coefficient has the same slope as this red broken line.

キーワード

・平均値の定理

日本語解説

文１「定理」

「定」は定める（to decide）という意味です。「定理」は理（law, rule）を定めるという意味で theorem になります。このように、前の漢字が動詞（verb）になって後ろの漢字が目的語になっている 2字の熟語があります。

（例）作文　composition　→　文（sentence）を作る（to make）
　　　帰国　homecoming　→　国（country）へ帰る（to return）
　　　喫茶　drinking tea　→　お茶（tea）を飲む　＝　喫（to have）

文２「少なくとも一つ存在する」

「少」は少ない（few）という意味の漢字です。反対の意味の漢字が“多”で、多い（much）という意味です。この 2 つの漢字を組み合わせた“多少”という熟語があります。これは“少ない程度が多い”（much few）という意味になり、とても少ないという意味になります。

（例）多いです　＞　少ないです　＞　多少あります

「一つ」は one ですが、ものを数える時に使います。「一」は 1 を表す漢字です。「つ」は数詞（counter）と言い、数字に付いてものを数えるのに使います。この時、数字の読み方が変わるので注意が必要です。また、“十”以上を数える時には「つ」が付きません。

数字の漢字と数え方

1	一	いち	一つ	ひとつ
2	二	に	二つ	ふたつ
3	三	さん	三つ	みっつ
4	四	し　よん	四つ	よっつ
5	五	ご	五つ	いつつ
6	六	ろく	六つ	むっつ
7	七	しち　なな	七つ	ななつ
8	八	はち	八つ	やっつ
9	九	きゅう	九つ	ここのつ
10	十	じゅう	十	とお
11	十一	じゅういち	十一	じゅういち
12	十二	じゅうに	十二	じゅうに

13	十三	じゅうさん	十三	じゅうさん
		・・・		・・・

「少なくとも」は at least という意味で、「少なくとも一つ」とは at least one ということです。したがって、一つ以上あることもあります。

「存在する」は to exist という意味です。“存” も “在” も to exist という意味で、「存在」は意味の似た漢字を組み合わせた熟語です。

文４「赤点線」

「赤」は red です。以下は色を表す日本語とその漢字の例です。

(例)	青	blue	黒	black
	黄色	yellow	白	white
	緑	green	灰色	gray
	紫	purple	茶色	brown
	橙	orange		

「点」は dot、「線」は line という意味で、「点線」は slope です。「線」という漢字の前に漢字一文字を付けて、その線の種類を表します。

(例)	実	real	＋	線	→	実線	solid line
	斜	inclined	＋	線	→	斜線	slash, slanted line
	下	under	＋	線	→	下線	underline
	太	thick	＋	線	→	太線	bold line
	赤	red	＋	線	→	赤線	red line

7. 高次導関数

高次導関数

$f'(x)$ がさらに微分可能 ⇨ $\{f'(x)\}' = f''(x)$: 第二次導関数

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

$f''(x)$ がさらに微分可能 ⇨ $\{f''(x)\}' = f'''(x)$: 第三次導関数

⋮

高次導関数

高次導関数の別の表現

$f''(x)$, $f'''(x)$ … , $f^{(n)}(x)$

⇨ $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}$ … , $\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}}\right) = \frac{d^ny}{dx^n}$

1. 4 章で導関数について説明しましたが，ここではその導関数をさらに微分して得られる高次導関数について説明します．
2. x の関数 $f(x)$ が微分可能であれば，その導関数 $f'(x)$ がまた x の関数となります．
3. この導関数 $f'(x)$ もまた微分可能であれば，その導関数 $\{f'(x)\}'$ を $f''(x)$ で表し，これを $f(x)$ の第二次導関数といいます．
4. さらに $f''(x)$ の導関数があればそれを $f'''(x)$ で表し，これを $f(x)$ の第三次導関数といいます．
5. 以下同様にして第n次導関数を $f^{(n)}(x)$ で表し，第二次以降の導関数を総称して高次導関数といいます．

1. In chapter 4, I explained a derivative. Here, I will explain higher-order derivatives which are obtained by differentiating the derivative further.
2. If the function $f(x)$ is differentiable, its derivative $f'(x)$ is also a function of x.
3. If this derivative $f'(x)$ is also differentiable, we obtain the derivative $\{f'(x)\}'$ which is denoted by $f''(x)$ and we call this the second-order derivative.
4. Furthermore, if there exists a derivative of $f''(x)$, it is denoted by $f'''(x)$ and called the third-order derivative.
5. In the similar way, the n-th order derivative is denoted by $f^{(n)}(x)$. Any derivative with the second and higher orders can be referred to as a higher order derivative.

6. 導関数は, このように別な表現をされることがあります.

6. Derivatives are expressed in a different way like this.

キーワード

・第二次導関数,　・高次導関数

日本語解説

文1「高次導関数」

「高」は高い（high）という意味です。反対の意味の漢字に“低”があり、低い（low）という意味です。これらの漢字を組み合わせた“高低”という熟語があり、高いところと低いところ両方あるいはその間（both/between high and low）を表す言葉になります。

このように、反対の意味の漢字を組み合わせた熟語があります。

（例）高　high　＋　低　low　→　高低

この山道は高低差がかなりあります。

男　man　＋　女　woman　→　男女

このクラスは男女一緒に授業を受けます。

上　upper　＋　下　under　→　上下

この置物は上下が反対です。

大　big　＋　小　small　→　大小

靴のサイズは大小いろいろあります。

左　left　＋　右　right　→　左右

左右をよく見て道を渡りましょう。

文3「$f''(x)$」

文4「$f'''(x)$」

「’」は dash を日本語の読み方にしたダッシュと読みましたが、「”」はそのまま“ダッシュダッシュ”または two dash を日本語の読み方にした“ツーダッシュ”または“トゥーダッシュ”などと読みます。同様に、「’”」は three dash を日本語の読み方にした“スリーダッシュ”などと読みます。

このように時々、英語の数字を日本語の読み方にしたカタカナ語で読んだり書いたりすることがあります。

英語の数字を日本語の読み方にしたもの

1	one	ワン

2	two	ツー　トゥー*
3	three	スリー
4	four	フォー**
5	five	ファイブ**
6	six	シックス
7	seven	セブン
8	eight	エイト
9	nine	ナイン
10	ten	テン
11	eleven	イレブン
12	twelve	トエルブ　トゥエルブ*　トウェルブ***

上の表の*印“トゥ”は元々の日本語にない発音ですが、英語の“tw”または“to”の付く言葉を日本語の読み方で読むとき・書くときに時々使います。

（例）today　　トゥデイ
　　tonight　　トゥナイト
　　tomorrow　　トゥモロー

また、**印 “ファ”“フィ”“フェ”“フォ” も同様に、英語の “fa / pha” “fi / phy” “fe” “fo / pho” などの付く言葉を日本語の読み方で読むとき・書くときに時々使います。

（例）fan　　ファン
　　alphabet　　アルファベット
　　fiction　　フィクション
　　physical　　フィジカル
　　festival　　フェスティバル
　　font　　フォント
　　telephone　　テレフォン

また、***印 “ウィ”“ウェ”“ウォ”も同様に、英語の “wi” “we” “wo / wa” などの付く言葉を日本語の読み方で読むとき・書くときに時々使います。英語の “wa / wu / wor” などは普通 “ワ” を使います。

（例）wink　　ウィンク
　　window　　ウィンドウ
　　wedding　　ウェディング
　　walking　　ウォーキング
　　warning　　ワーニング
　　worm　　ワーム

文３「第二次」
文４「第三次」

「二」と「三」はそれぞれ 2 と 3 の漢字です。後ろに「次」が付くと、回数や順番を表します。「二次」は second、「三次」は third という意味になります。同じようなものに「回」「度」「番」などがありますが、使い方や意味はほとんど同じです。その時、数字の読み方が一部変わるもの（下の表の*印）がありますので注意が必要です。

1	一	いち	一次	いちじ	一回	いっかい*
2	二	に	二次	にじ	二回	にかい
3	三	さん	三次	さんじ	三回	さんかい
4	四	し　よん	四次	よじ*	四回	よんかい
5	五	ご	五次	ごじ	五回	ごかい
6	六	ろく	六次	ろくじ	六回	ろっかい*
7	七	しち　なな	七次	しちじ　ななじ	七回	ななかい
8	八	はち	八次	はちじ	八回	はっかい*　はちかい
9	九	きゅう	九次	くじ*　きゅうじ	九回	きゅうかい
10	十	じゅう	十次	じゅうじ	十回	じゅっかい*
		・・・		・・・		・・・

「第」は回数や順番を表す数字の前につく漢字です。付かないこともあります。

8. 関数の近似

関数の近似

○テイラーの定理

区間 $[a,x]$ で $f(x)$ の第n次導関数 $f^{(n)}(x)$ まで存在するならば、
$a<c<x$ なる c を適当に取るとき、以下の式が成立

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+R_n(x)$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \quad ：剰余項$$

$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$ のときテイラー展開可能

○マクローリンの定理

テイラーの定理において、$a=0$ となる場合

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+R_n$$

1.	つぎに，テイラーの定理について説明します．	1.	Next, I will explain Taylor’s theorem.
2.	テイラーの定理は，関数を一点における高次の導関数を用いて近似するものです．	2.	Taylor’s theorem approximates a differentiable function by the higher-order derivatives around a given point.
3.	この定理は，「区間$[a,x]$で$f(x)$の第n次導関数 $f^{(n)}(x)$ まで存在するならば，$a<c<x$なるcを適当に取るとき，図の式が成立する．」というものです．	3.	This theorem states,” If $f(x)$ has its derivatives up to the n-th order $f^{(n)}(x)$ in the closed interval $[a, x]$, the expression in the figure holds for some c in $a<c<x$ “.
4.	式中の$R_n(x)$は剰余項といい，$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$ で表されます．	4.	In this expression, the term $R_n(x)$ is a reminder term and given by $R_n(x)=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$.
5.	剰余項について，$n\to\infty$としたとき0となれば，関数$f(x)$はテイラー展開可能となります．	5.	If the reminder term becomes zero as $n\to\infty$, it is possible to approximate the function $f(x)$ by Taylor’s expansion.
6.	この定理について，$n=0$とすれば平均値の定理となります．	6.	If we put $n=0$, this theorem becomes the mean value theorem.
7.	テイラーの定理において，$a=0$となる場合に図のような式が成立します．この式をマク	7.	In a particular case where $a=0$, Taylor’s theorem takes this form and

ローリンの定理といいます.　　called Maclaurin's theorem.

キーワード

・テイラーの定理,　・マクローリンの定理

日本語解説

文1「テイラーの定理」
文7「マクローリンの定理」

日本人以外の人の名前は、外国語の発音を日本語の読み方にしたカタカナ語で読んだり書いたりすることがあります。その際、元の外国語と発音が大きく異なるものもあるので、注意が必要です。また、日本人以外の漢字の名前の場合、外国語の発音を日本語の読み方にしたカタカナ語を使う場合と日本語の漢字の読み方を使う場合があります。

（例）Bernoulli　ベルヌーイ
Riccati　リカッチ
Euler　オイラー
Beethoven　ベートーベン　ベートーヴェン
Einstein　アインシュタイン
金 大中　김 대중　Kim Dae-jung　キム デジュン
胡 錦涛　Hu Jintao　ホゥー チンタオ　こ きんとう

文2「一点」

「点」は point という意味で、この前に数字が付いてその数を表す言葉になります。読み方は「回」の場合とほぼ同様ですが、一部違うもの（下の表の*印）がありますので注意が必要です。

1	一	いち	一回	いっかい	一点	いってん
2	二	に	二回	にかい	二点	にてん
3	三	さん	三回	さんかい	三点	さんてん
4	四	し　よん	四回	よんかい	四点	よんてん
5	五	ご	五回	ごかい	五点	ごてん
6	六	ろく	六回	ろっかい	六点	ろくてん*
7	七	しち　なな	七回	ななかい	七点	ななてん
8	八	はち	八回	はっかい	八点	はってん　はちてん
9	九	きゅう	九回	きゅうかい	九点	きゅうてん
10	十	じゅう	十回	じゅっかい	十点	じゅってん
		・・・		・・・		・・・

文２「近似する」

「近」は近い（near）という意味です。反対の意味の漢字に「遠」があり、遠い（far）という意味です。この反対の意味の２つの漢字を組み合わせた「遠近」という熟語もあります。

「似」は似ている（similar）という意味です。意味が似ている「近」と組み合わせた熟語が「近似」で、approximation という意味になります。

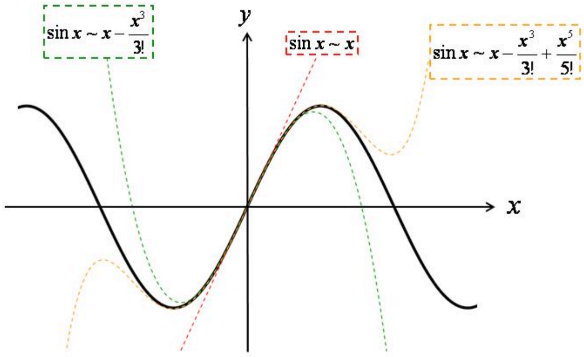
9. マクローリンの定理と近似公式の例

マクローリンの定理と近似公式の例

$f(x) = \sin x$ について、マクローリンの定理を適用

$f'(x) = \cos x \quad f''(x) = -\sin x \quad f'''(x) = -\cos x \quad \cdots$

$$\boxed{\sin x \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots}$$



1. つぎに，例として $f(x) = \sin x$ にマクローリンの定理を適用します．図の黒実線が $f(x) = \sin x$ を表す曲線です.
2. ここで， $f(x) = \sin x$ の一次導関数は $f'(x) = \cos x$， 二次導関数は $f''(x) = -\sin x$， 三次導関数は $f'''(x) = -\cos x$ となり，以降より高次導関数は $\sin x$， $\cos x$， $-\sin x$， $-\cos x$ の繰り返しになります.
3. したがって，マクローリンの定理を適用をした $\sin x$ は次式のようになります.

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

4. マクローリンの定理において $n = 0$ のとき， $f(x) = \sin x$ は $\sin x \approx x$ と近似され，図中の赤点線になります.
5. $n = 1$ のとき，$\sin x \sim x - \frac{x^3}{3!}$ に近似され，図中の緑点線になります．このとき，曲線

1. As an example, I will apply the Maclaurin's theorem to $f(x) = \sin x$. The black full line represents $f(x) = \sin x$.
2. The first derivative of $f(x) = \sin x$ is $f'(x) = \cos x$, the second derivative is $f''(x) = -\sin x$, the third derivative is $f'''(x) = -\cos x$, and so on. The further higher order derivatives becomes $\sin x$, $\cos x$, $-\sin x$, and $-\cos x$ in cyclic order.
3. Therefore, by applying Maclaurin's theorem, $\sin x$ is represented approximately as follows.

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

4. When $n = 0$, $f(x) = \sin x$ is approximated as $\sin x \approx x$. This is shown by the red broken line in the figure.
5. When $n = 1$, it is approximated as $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$ which is shown by the green

$f(x) = \sin x$ にわずかに近づきます.

broken line in the figure. This curve slightly approaches to $f(x) = \sin x$.

6. $n = 2$ のとき, $\sin x \sim x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$ に近似され, 図中の橙点線になります. $n = 1$ のときと比較すると, さらに曲線 $f(x) = \sin x$ に近づきます.

6. When $n = 2$, it is approximated as $\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$ which is shown by the orange broken line in the figure. Compared with the case of $n = 1$, this curve further approaches to $f(x) = \sin x$.

7. つまり, n を大きくすればするほど, マクローリンの定理で近似された関数は, 元の関数に近い特徴を示すことがわかります.

7. As n increases, the approximation obtained by the Maclaurin formula becomes closer to the original function.

日本語解説

文１「$f(x) = \sin x$」

「sin」は sine を日本語の読み方にしたサインと読みます。この式は“エフ　(かっこ)　エックス　イコール　サイン　エックス”などと読みます。

文１「黒実線」「曲線」
文４「赤点線」
文５「緑点線」
文６「橙点線」

どちらも線（line）の種類を表す熟語です。「黒実線」は黒い（black）実線（solid line）、「曲線」は曲がった（curved）線という意味です。「赤点線」「緑点線」「橙点線」はそれぞれ、赤い（red）点線（broken line）、緑の（green）点線、橙の（orange）点線という意味です。

文２「$f'(x) = \cos x$」

「cos」は cosine を日本語の読み方にしたコサインと読みます。この式は“エフ　ダッシュ　(かっこ)　エックス　イコール　コサイン　エックス”などと読みます。